

# Ayın Matematik Sorusu - Cevap Anahtarı

İYTE Matematik Bölümü

Şubat-Mart 2023

## Problem

Aşağıdaki özelliklere sahip bir  $X$  kümesinin en çok kaç elemanı vardır?

1. Her  $A \in X$  için  $|A| = 12$ .
2.  $A, B \in X$  ve  $A \neq B \implies A \Delta B \in X$ .

## Cevap

$X$  kümesinin boş kümeden farklı olduğu açıktır. Varsayalım ki  $X$  kümesinin yalnızca bir elemanı,  $A$ , olsun. Fakat bu durumda,  $A \Delta A$  boş kümedir. Dolayısıyla,  $X$  kümesinin de elemanı olamaz. Bu yüzden,  $X$  kümesinin eleman sayısının en az 2 olması gerektiğini söyleyebiliriz.

Şimdi,  $X$  kümesinin 2 elemanlı olduğunu varsayalım ve elemanlarını  $A$  ve  $B$  ile gösterelim. İlk olarak,  $A$  ve  $B$ 'nin ayrık kümeler olamayacağını gösterelim.

Varsayalım ki  $A \cap B = \emptyset$  olsun. Bu durumda  $A \Delta B = A \sqcup B$  eşitliğini elde ederiz. O zaman,  $|A \Delta B| = |A \sqcup B| = 12 + 12 = 24$  olur. Fakat, bu  $X$  kümesinin ikinci özelliği ile çelişmektedir.

$A$  ve  $B$  kümelerinin ayrık olmadığını gösterdik. Yani,  $A \cap B$  en az bir eleman içerir. Varsayalım ki  $A \cap B$ 'nin,  $s$  tane elemanı olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$|A \setminus B| = 12 - s$$

$$|B \setminus A| = 12 - s$$

$A \Delta B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \in X$  olduğundan,

$$\begin{aligned} |A \Delta B| &= |A \setminus B| + |B \setminus A| \\ &= (12 - s) + (12 - s) \\ &= 24 - 2s \\ &= 12 \end{aligned}$$

eşitliğinden  $s = 6$  sonucunu elde ederiz. Bu da  $|A \setminus B| = |B \setminus A| = 6$  olması gerektiğini anlıyoruz.

$X$  kümesinin iki elemanlı olduğu durumda elde ettiklerimizi not edelim:  
 $A$  ve  $B$ ,  $X$ 'in elemanları olsun. O zaman,

(i)  $A \cap B \neq \emptyset$

(ii)  $|A \setminus B| = |B \setminus A| = |A \cap B| = 6$ .

Şimdi varsayalım ki  $A, B, C, X$  kümesinin farklı üç elemanı olsun. Bu durumda,  $A$  kümesinin içerdiği alt küme sayısı  $1 + 2 + 1 = 4$ 'tür. 4, 12'yi böldüğünden  $A$  kümesinin içerdiği her ayrık alt kümenin 3 elemanı olur. Böylece, aşağıdaki kümeler  $X$ 'e aittir.

$$A, B, C, A \triangle B, A \triangle C, B \triangle C, (A \triangle B) \triangle C$$

Fakat,  $A, B, C, D$  kümeleri  $X$ 'in elemanı olursa,  $A$  kümesinin içereceği ayrık alt küme sayısı  $1 + 3 + 3 + 1 = 8$  olacaktır. 8, 12'yi bölmediği için bu durum  $X$  kümesi için mümkün değildir.

Diğer durumlarda da  $A$ 'nın içerdiği ayrık alt küme sayısı 12'yi bölmediğinden,  $X$ 'in eleman sayısı en çok 7'dir ve bu elemanlar da aşağıdaki kümelerdir:

$$A, B, C, A \triangle B, A \triangle C, B \triangle C, (A \triangle B) \triangle C.$$