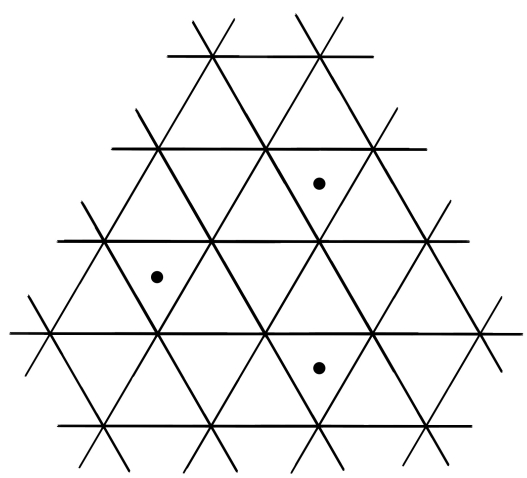
Ayın Sorusu

Mayıs-2022

**Soru:** Düzlemde her biri 5 doğru parçasından oluşan 3 paralel çizgi grubu Şekil 1'deki gibi kesişmektedir. Kesişimler arasında kalan üçgenler eşkenardır. Şeklin 120 ve 240 derecelik rotasyonları sonucu birbiriyle yer değiştiren üçgenlere denk üçgen grubu diyelim. Örnek olarak Şekil 1'de içlerine nokta koyulmuş üçgenler bir denk üçgen grubudur. Her bir üçgenin içine 0 veya 1 yazarak çeşitli dizilişler oluşturduğumuzda, her iki paralel çizgi arasında ve her denk üçgen grubu içinde kalan sayıların toplamı çift olan $x$ kadar diziliş varsa, her iki paralel çizgi arasında kalan sayıların toplamı çift olan kaç diziliş vardır?



Şekil 1

## Çözüm:

Şekil 1 de verilen yapı her bir durumda bir diziliş temsil etsin. Öncelikle soruda bahsedilen diziliş gruplarını birer küme olarak tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
D &= \text{paralel çizgiler arasındaki sayıların toplamlarının çift olduğu dizilişler},\\
S &= D\text{'nin altında denk üçgenlerin içindeki sayıların aynı olduğu dizilişler},\\
K &= D\text{'nin altında denk üçgenlerin içindeki sayıların toplamı çift olan dizilişler}.
\end{aligned}
$$

Şimdi $S \times K$ kümesinden $D$'ye bir dönüşüm tanımlayalım :

$$
\begin{aligned}
\phi : S \times K &\to D, \\
(A, B) &\to A + B.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Yukarıdaki işlem ile tanımlanan $\phi$ dönüşümünün birebir ve örten olduğunu gösterelim.

**Birebir** :

$$
\begin{aligned}
\phi(A,B) = \phi(C,D) &\Rightarrow (A,B) = (C,D) \quad \text{olduğunu göstermemiz gerekiyor.}\\
\phi(A,B) = \phi(C,D) &\Rightarrow A + B = C + D,\\
&\Rightarrow A - C = B - D.
\end{aligned}
$$

$A - C \in S$ ve $B - D \in K$ ' dir. $A - C \in S \cap K$ ve $B - D \in S \cap K$ olduğunu söyleyebiliriz. Burada $S \cap K = \{\theta\}$' dır ve $\theta$ her üçgenin içindeki sayının 0 olduğu dizilişi temsil eder. Bunu görmek için, gerçekten de bir diziliş $S$' deyse denk üçgenlerin içindeki sayılar aynı olmalıdır. $K$' da olduğu için de denk üçgenlerin içindeki sayıların toplamı çift olmalıdır. $D$' deki denk üçgenlerin içindeki sayılar 0 olmalıdır. Demek ki

$$
\begin{aligned}
A - C = D - B &= \theta,\\
(A,B) &= (C,D).
\end{aligned}
$$

**Örten** :

$M \in D$ alalım ve $A + B = M$ için $A \in S,\ B \in K$ olacak şekilde $A$ ve $B$ elemanları var mıdır?

Bunu görmek için, $M_{120}$ ve $M_{240}$ ' ı sırasıyla $M$'nin 120 derecelik ve 240 derecelik rotasyonları olarak alalım.

$$
M = M + M_{120} + M_{240} - M_{120} - M_{240},
$$

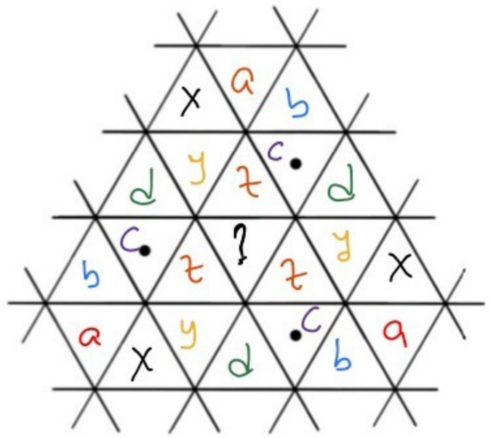
ve

$$
M_{120} \cong -M_{120} (\text{mod } 2) \text{ ve } \quad M_{240} \cong -M_{240} (\text{mod } 2),
$$

olduğundan

$$
M = M + M_{120} + M_{240} + M_{120} + M_{240}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Dikkat edilirse $M + M_{120} + M_{240} \in S$, ve $M_{120} + M_{240} \in K$ olduğu görülür. Bununla birlikte $\phi$ 'nin örten bir dönüşüm olduğunu göstermiş olduk.$\phi$ birebir ve örten bir dönüşüm olduğundan $|D| = |S||K|$'dir. O halde $S$ kümesinin eleman sayısını bulduğumuzda her iki paralel çizgi arasında kalan sayıların toplamı çift olan dizilişlerin sayısını $|K| = x$ cinsinden bulmuş oluruz.$|S|$' i bulmak için simetrik bir dizilişte $a, b, c, d$ sayılarını şekildeki üçgenlere gelecek şekilde keyfi olarak yazalım.




Her paralel çizgi arasındaki toplamların çift olması ve dizilişlerin simetrik olması için geri kalan $x, y, z$ sayılarını uygun ve tek şekilde seçilebildiği görülebilir. Üçgenin içindeki $x$ sayısı; $a + b$ çiftse 0, tekse 1 olmalıdır. Yani $x$, $a$ ve $b$'ye bağlıdır.

Böylelikle dizilişteki bütün üçgenleri taramış olduk. Ve dizilişi yaparken 4 tane keyfi seçim yaptık. Bunlarında kendi arasında yer değiştirebileceklerini hesaba katarsak $|S| = 2^4 = 16$ olur. O halde

$$|D| = 16|K| = 16x$$

elde edilir.