ÇÖZÜM-AYIN SORUSU

Mart-2022

Verilen bir pozitif n tam sayısı için,

$$\cos(nx) = x \tag{1}$$

denkleminin pozitif reel sayılarda kaç çözümü vardır?

ÇÖZÜM

Verilen bir $n \in \mathbb{Z}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\cos(nx)$ fonksiyonunun görüntüsü daima $[-1, 1]$'nda yer alır. Dolayısıyla (1) eşitliğinin sağlanması, denklemin sağ tarafının da 1'den küçük veya 1'e eşit olduğu hallerde, yani $x \leq 1$ iken mümkündür. Özel olarak $x = 1$ için, $n \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $\cos(n)$ değeri 1'e eşit olamaz. Dolayısıyla (1) denkleminin muhtemel çözümleri yalnızca $(0, 1)$ aralığında yer almak zorundadır.

k bir doğal sayı olmak üzere, $\cos(nx)$ fonksiyonun $\left(\frac{2k\pi}{n}, \frac{2(k+1)\pi}{n}\right]$ aralığında gerçekleştirdiği hamleyi 1 tam devir olarak isimlendirelim. Fonksiyonun $(0, 1)$ aralığında gerçekleştirdiği devirlerin sayısını T ile gösterelim. $\cos(nx)$ ve x fonksiyonları sürekli oldukları için, eğer $T = 0$ ise, o zaman bu fonksiyonlar $(0, 1)$ aralığında yalnızca 1 noktada kesişirler. Verilen n değerine göre $\cos(nx)$'in $(0, 1)$ aralığında gerçekleştirdiği devirlerin sayısı 1'e eşit veya 1'den çok olabilir. İddiamız o ki x ve $\cos(nx)$ fonksiyonları $(0, 1)$ aralığında $2T + 1$ noktada kesişirler.

1. $T = 1$ olsun, yani $\frac{2\pi}{n} < 1 < \frac{4\pi}{n}$. Bu durumda $\cos(\underline{x_1}) = -1$, $\cos \overline{x_1} = 1$ olan ve $0 < \underline{x_1} < \overline{x_1} < 1$ eşitsizliğini sağlayan öyle $\underline{x_1}$, $\overline{x_1}$ sayıları bulunabilir. $(0, \underline{x_1})$ ve $[\underline{x_1}, \overline{x_1})$ aralıklarının her birinde $\cos(nx)$ bir yarı-devir gerçekleştirdiği için ve her bir yarı-devirde $\cos(nx)$ monoton olduğu için, bu aralıkların her birinde ayrı ayrı öyle tek bir nokta bulunabilir ki, $\cos(nx)$ ve x fonksiyonları bu noktalarda aynı değere sahiptirler. $[\overline{x_1}, 1]$ aralığının sol uç noktasında $cos(n\overline{x_1}) = 1 > \overline{x_1}$, sağ uç noktasında $cos(n) < 1$ ve bu aralıkta fonksiyonlar monoton olduklarından, $[\overline{x_1}, 1]$ aralığında $\cos(nx)$ ve x fonksiyonlarının tek bir kesişim noktası mevcuttur.

2. $T = M$, yani $\cos(nx)$ fonksiyonunun $(0, 1)$ aralığında gerçekleştirdiği tam devirlerin sayısının M olsun. Bu durumda, her $j = 1, \ldots, M$ için

$\cos(\underline{x_j}) = -1$, $\cos(\overline{x_j}) = 1$ olan ve

$$0 < \underline{x_1} < \overline{x_1} < \cdots < \underline{x_M} < \overline{x_M} < 1 \tag{2}$$

öyle $\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_M}$ ve $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_M}$ noktaları bulunabilir. Bu durumda $\cos(nx)$ ve x fonksiyonlarının $(0,1)$ aralığında $2M+1$ noktada kesiştiklerini kabul edelim.

3. $T = M+1$ olsun. Bu durumda, (2) ile belirttiğimiz noktalara ilave olarak $\cos(n\underline{x_{M+1}}) = -1$, $\cos(n\overline{x_{M+1}}) = 1$ olan ve $\overline{x_M} < \underline{x_{M+1}} < \overline{x_{M+1}} < 1$ eşitsizliğini sağlayan $\underline{x_{M+1}}$ ve $\overline{x_{M+1}}$ noktaları daha mevcuttur. Tümevarımın ilk adımı izleyerek, $\cos(nx)$ ve x fonksiyonlarının $(\underline{x_{M+1}}, \overline{x_{M+1}})$ ve $[\overline{x_{M+1}}, 1]$ aralıklarında yer alan iki yeni kesişim noktası olduğunu elde edebiliriz.