ÇÖZÜM-AYIN SORUSU
Ocak-2022

Pozitif tam sayıların 6 ile aralarında asal olan sayıların oluşturduğu alt kümesine A diyelim. A kümesinin bazı elemanlarını şöyle gösterebiliriz

$$A = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, ...\}.$$

a_n rasyonel sayısı A kümesindeki ilk n elemanın terslerinin toplamı olsun. Örneğin,

$a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{5}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$,...,

$$a_9 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25}.$$

$n > 1$ olduğunda, a_n rasyonel sayısının bir tam sayı olamayacağını kanıtlayacağız.

ÇÖZÜM

A kümesinin n. elemanını b_n diye gösterelim. Demek ki

$$a_n = 1 + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{b_n}.$$

Şimdi de $5^k \leq b_n < 5^{k+1}$ sağlayan $k \geq 1$ sayısını seçelim ($n > 1$ olduğundan $k \geq 1$ olmak zorunda). 5^k sayısı A'nın bir elemanıdır, fakat $2 \cdot 5^k, 3 \cdot 5^k, 4 \cdot 5^k$ sayıları A'nın bir elemanı değildir. Demek ki b_n'den küçük eşit ve 5^k ile tam bölünen A'daki tek sayı 5^k sayısıdır. L sayısı $b_1, ..., b_n$ sayılarının en küçük ortak katı olsun. O zaman $L = 5^k \cdot u$ ve u sayısı 5 ile bölünmeyen bir sayıdır. a_n sayısını tekrardan düzenleyip yazarsak,

$$a_n = \frac{\frac{L}{1} + \frac{L}{5} \cdots + \frac{L}{5^k} + \cdots + \frac{L}{b_n}}{L},$$

paydaki $u = \frac{L}{5^k}$ hariç diğer terimlerin 5 ile bölündüğünü görürüz. Bu durumda pay 5 ile bölünemez fakat payda 5 ile bölünüyor. Bu da bize a_n sayısının bir tam sayı olamayacağını verir.